BILANGAN KOMPLEKS

A. Pengertian Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan yang terbesar di dalam matematika adalah himpunan bilangan komleks. Himpunan bilangan riil yang kita pakai sehari-hari merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan kompleks ini.

Secara umum bilangan kompleks terdiri dari dua bagian : bagian riil dan bagian imajener (khayal). Bagian khayal bercirikan hadirnya bilangan khayal i yang didefinisikan sebagai :

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{……………………………………..(1)}$$

System bilangan kompleks merupakan perluasan dari system bilangan riil. Misalkan, saat kita memerlukan solusi dari persamaan $x^2 = -25$, tak ada bilangan riil yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, kita perlu mendefinisikan bilangan kompleks. Bilangan kompleks ditulis sebagai pasangan terurut dua bilangan riil, z = x + i y, dimana x = Re z (bagian riil dari bilangan kompleks), y = Im z (bagian imajener dari bilangan kompleks).

Timbulnya bilangan kompleks dapat diikuti dari proses matematika yang sederhana, yaitu dari persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{……………………….(2)}$$

Dimana cara penyelesaiannya dengan menggunakan rumus abc, yang menghasilkan dua akar sekaligus

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{…………………….(3)}$$

$$D = b^2 - 4ac \quad \text{……………………..(4)}$$

Untuk nilai diskriminan D≥0, tidak ada masalah, karena akar-akar persamaannya bersifat riil menurut persamaan (3). Untuk kasus D<0, didalam matematika dasar dikatakan bahwa persamaan kuadrat (2) tidak memiliki akar riil. Implikasi selanjutnya adalah bahwa akar persamaannya termasuk bilangan kompleks. Bilangan diskriminana negative dituliskan D = - d^2, maka akar kompleksnya adalah :

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{d}}{2a}$$
………………………..(5)

Contoh :

Tentukan solusi dari persamaan :

a. $x^2 - 25 = 0$

b. $x^2 + 2x + 10 = 0$

Jawab :

a. Diketahui $x^2 - 25 = 0$,

ini memberikan $x^2 = -25$ atau $x = \pm\sqrt{25 \text{ x } (-1)}$

sehingga $x = \pm 5i$

b. Deketahui $x^2 + 2x + 10 = 0$,

Dengan menggunakan rumus $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ maka

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36 \text{ x } (-1)}}{2} = -1 \pm 3\sqrt{-1} = -1 \pm 3i$$

sehingga solusi dari persamaan tersebut adalah :

$x_1 = -1 + 3i$ atau $x_2 = -1 - 3i$

Dalam himpunan bilangan kompleks, x1, x2 dikatkan sebagai conjugat (sekawan) satu terhadap yang lain, karena perkalian antara mereka akan menghasilkan bilangan riil.

Setiap bilangan kompleks memiliki konjugat. Hasil kali antara suatu bilangan kompleks dengan konjugatnya dinamakan modulus. Misalkan, konjugat dari z = x + iy diberikan oleh $\bar{z} = x - iy$ maka modulus dari z adalah :

$$|z| = z\,\bar{z} = x^2 + y^2$$
…………………..(6)

Untuk setiap bilangan kompleks z ≠ 0 maka modulus z adalah positif.

Suatu bilangan kompleks z memiliki konjugat z* yang didefinisikan dan ditulis sebagai :

$$z^* = \bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$$
…………………….(7)

Sehingga perkaliannya dengan z menghasilkan bilangan riil

$z^*z = |z|^2 = r^2 = x^2+y^2$ …………………………(8)

Sifaf ini dimanfaatkan untuk meriilkan penyebut dalam pecahan bilangan kompleks :

$1/z = z^*/|z|^2$ …………………………(9)

Sifat lain bilangan konjugat ini adalah distribusi terhadap penjumlahan maupun perkalian :

- $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1.z_2)^* = z_1^*.z_2^*$

…………………………(10)

Contoh :

Tentukan modulus dari $z = 2 + i$!

Jawab :

Konjugat dari $z = 2 + i$ adalah $\overline{z} = 2 - i$,

sehingga modulus dari z adalah :

$$\begin{aligned} |z| &= z\,\overline{z} \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Tentukan modulus dari $z = \dfrac{3-4i}{i-2}$ = ……?????????????????

Misalkan z1 dan z2 merupakan bilangan kompleks, berlaku :

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ …………………….(11)

Misalakan z1, z2 dan z3 merupakan bilangan kompleks, beberapa sifat aritmatika dari bilangan kompleks tersebut adalah sebagai berikut :

a. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
b. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
c. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
d. $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
e. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
f. $0 . z_1 = z_1 . 0 = 0$
g. $1. z_1 = z_1 . 1 = z_1$
h. $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$
i. $z_1 z_2 = z_1 z_2$
j. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

B. Aljabar Bilangan Kompleks

Dengan menggunakan aturan bahwa bilangan imajener satuan i diperlakukan sebagai suatu variabel riil, kita dapat membangun aturan aljabar bilangan kompleks, yakni : penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Misalkan z1 = x1 + iy1 dan z2 = x2 + iy2 dua bilangan kompleks, maka operasi aljabar antara kedua bilangan kompleks ini didefinisikan memberikan pula suatu bilangan kompleks baru z = x + iy.

1. Penjumlahan/pengurangan

   $z1 \pm z2 = (x1 + iy1) \pm (x2 + iy2) = (x1 \pm x2) + i\,(y1 \pm y2)$ ………(12)

2. Perlakian

   $z1.z2 = x1x2 + ix1y2 + iy1x2 + i^2y1y2$

   $= (x1x2 – y1y2) + i\,(x1y2 + x2y1)$ ……………….(13)

3. Pembagian

   $$\frac{z1}{z2} = \frac{(x1 + iy1)(x2 - iy2)}{(x2 + iy2)(x2 - iy2)} \text{ ………………………………(13a)}$$

   $$= \frac{(x1x2 + y1y2)}{(x2^2 + y2^2)} + i\,\frac{(-x1y2 + y1x2)}{(x2^2 + y2^2)} \text{ ………………..(14b)}$$

4. Perkalian dan pembagian dalam bentuk polar

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$
$$z_2 = r_2 e^{j\theta_1}$$
$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

…………………(15a dan 15b)

Contoh :

1. (2 + 5i) + (3 – 2i) = 5 + 3i
2. (4 – 7i) – (2 + 3i) = 2 – 10i
3. (1 + 3i)(5 – 4i) = 5 – (-4i) + 15i – 12 i^2 = 17 + 11i, i^2 = -1
4. $\frac{(17+11i)}{(1+3i)} = \frac{(17+11i)}{(1+3i)} \cdot \frac{(1-3i)}{(1-3i)} = 5-4i$

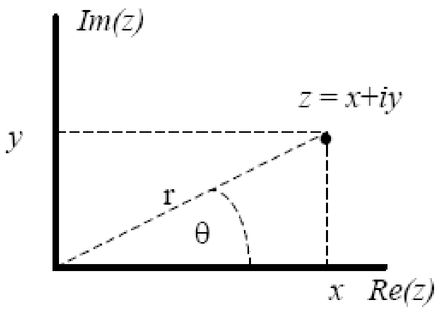
C. Penyajian Bidang Kompleks

1. Bentuk rectangular

Z = x + iy

X = Re Z, bagian riil

Y = Im Z, bagian imajener



Bilangan kompleks dapat digambarkan pada bidang Argand seperti pada gambar disamping. Semua titik yang berda pada sumbu Re(z) mewakili garis bilangan riil.

2. Bentuk polar

Sebuah bilangan kompleks z = x + iy, bentuk polar dapat dilihat pada gambar di atas. Dimana x = r cosθ dan y = r sin θ sehingga :

$$z = r\left(\cos\theta + \sin\theta\right) i \,.$$ …………………………..(16)

$r = |z|$ - *modulus* bilangan kompleks

$\theta = \arg(z)$ - *argumen* bilangan kompleks

Range utama argumen : $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$

sehingga : $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + k.2\pi$

Hubungannya dengan bentuk rectangular tampak dari gambar di bidang argand :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

…………………….(17)

Contoh : jika $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$, hitunglah r, θ , dan nyatakan z dalam bentuk polar

Penyelesaian

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{4}$

3. Bentuk eksponen

Dari uraian fungsi dasar Maclaurin untuk sin x, cos x dan e^x di peroleh hubungan :

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ……………………..(18)

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ……………………..(19)

Kedua persamaan di atas disebut persamaan Euler. Selanjutnya bilangan kompleks jika dinyatakan dalam bentuk eksponen sebagai :

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}$ …………………….(20a)

$\bar{Z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r e^{-i\theta}$ ………………………(20b)

Dengan mengingat hubungan fungsi trigonometri dengan eksponensial kompleks :

Sin θ $= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ ……………………………..(21a)

Cos θ $= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ …………………………….(21b)

Bentuk ini banyak dipakai dalam operasi perkalian dan pemangkatan, juga pada kasus-kasus yang melibatkan fungsi trigonometri seperti peristiwa perambatan gelombang, getaran, dan lain-lain.

Contoh :

1. Hitunglah cos i!

   Penyelesaian :

   $\cos i = \frac{e^{i.i} + ^{-i.i}}{2}$

   $= \frac{1/e + e}{2} = 1{,}543$

Catatan :

$a^b = e^{b \ln a}$

log 10 = 1

ln e = 1

$\ln a^b = b \ln a$

Log (a.b) = log a + log b

Ln (a.b) = ln a + ln b

Ln a/b = ln a – ln b

e = 2,72

2. Nyatakan z = 2 +2 i dalam bentuk polar dan exponential

   Penyelesaian

   $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

   $\theta = \tan^{-1} 2/2 = 45^0$

   Bentuk polarnya : z = $2\sqrt{2}$ (cos 45^0 + i sin 45^0)

   Bentuk exponentianya θ harus dirubah dalam bentuk radial (45^0 = 45 (π /180) = 0,7854) maka z = $2\sqrt{2}\, e^{0,7854\, i}$

3. Nyatakan $4e^{0,6109\, i}$ dalam bentuk polar dan rectangular

   Penyelesaian

   0,6109 = 180 (0,6190/π) = 35^0

   Bentuk polarnya : z = 4 (cos 35^0 + i sin 35^0)

   x = 4 cos 35^0 = 3,277,y = 4 sin 35^0 = 2,294

   sehingga bentuk rectangularnya : z = 3,277 + 2,294 i

Tugas 1 : Hitunglah

a. sin i b. cos (π /2 + i ln 2) c. Buktikan : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

d. sin (π - i ln 3) e. cos iπ f. $e^{-(i\pi/4) + \ln 2}$, nyatakan bentuk rectanglar

g. $z1 = 1 + i$, $z2 = i$, nyatakan dalam bentuk exponen kemudian ($z1 \times z2$).

D. Persamaam Kompleks

Suatu persamaan kompleks adalah suatu persamaan yang mengandung bilangan-bilangan kompleks. Sebagai contoh, $2 + 2iy = x + 5i$, adalah suatu persamaan kompleks dengan x dan y sebagai variabel-variabel riil. Untuk menangani suatu persamaan kompleks seperti ini perlu diterapkan difinisi berikut : *"dua bilangan kompleks adalah sama, jika dan hanya jika bagian riilnya sama dan juga bagian imajenernya sama. Jadi, persamaan kompleks $x + iy = p + iq$, setara dengan dua persamaan riil serempak $x = p$ dan $y = q$"*

$x + iy = p + iq$ dimana $x = p$ dan $y = q$ ……………………(22)

Contoh : Hitunglah x dan y jika $(x + iy)^2 = 2i$

Penyelesaian

$x^2 + 2ixy + i^2y^2 = 2i$

$x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$

$x^2 - y^2 = 0$, maka $x = y$

$2ixy = 2i$

$x = 1$ dan $y = 1$

Tugas 2 : Hitunglah x dan y dari persamaan berikut

a. $x + iy = 3i – 4$ b. $(x + iy)^2 = 1$ c. $(x + 2y + 3) + i (3x – y - 1) = 0$

E. Fungsi Logaritma Kompleks

Logaritma dari sebuah bilangan kompleks z :

$\text{Ln } z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i (\theta + 2n\pi)$ ……………………………(23)

Dimana $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ln merupakan logarotma dari suatu bilangan riil. Untuk harga $n = 0$, maka harga ln z disebut harga utama karena fungsi logaritma dalam himpunan bilangan kompleks sebenarnya adalah fingsi bernilai jamak.

Contoh : Nyatakan ln (- 1) dalam bentuk rectangular

Penyelesaian

$Z = – 1$, maka $r = | z| = 1$ dan $\theta = \pi$ sehingga

$\ln (- 1) = \ln 1 + i (\pi + 2n\pi)$

$\ln (- 1) = 0 + i (\pi , - \pi , 3\pi , - 3\pi ,\ldots)$

$\ln (- 1) = i (\pi , - \pi , 3\pi , - 3\pi ,\ldots)$

Tugas 3 : Hitunglah nilai

a. ln (1 - i)   b. ln i   c. $(1 - i)^{4i}$

F. Pangkat dan Akar Kompleks

Operasi pemangkatan juga memanfaatkan kemudahan yang dimiliki oleh bentuk exponential :

$Z^n = | re^{i\theta} |^n = r^n e^{i\theta n} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$……………………………..(24)

$Z^{1/n} = | re^{i\theta} |^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta\ 1/n} = r^{1/n} (\cos \theta /n + i \sin \theta /n)$………………………(25)

$\theta = \theta + 2n\pi$, dimana n = 0, ± 1, ± 2, ± 3, …

Contoh : Hitunglah $\sqrt[3]{(1 - i)}$

Penyelesaian

$r = \sqrt{2}$

$\theta = 5\pi /4 \pm 2n\pi$

$\sqrt[3]{(1 - i)} = (\sqrt{2})^{1/3} (\cos (5\pi /4)/3 + i \sin (5\pi /4)/3)$ ketika n = 0,

bagaimana jika n = ± 1, ± 2, ± 3

G. Penerapan dalam Fisika

Salah satu aplikasi dalam bilangan kompleks adalah penggunaan turunan.

Z = x + iy, dengan x dan y merupakan fungsi t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

Sedangkan harga mutlak dari kedua turunan di atas adalah

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$$
$$\left|\frac{d^2z}{dt^2}\right| = \sqrt{(d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Metode ini digunakan dalam fisika, dimana jika z menyatakan kedudukan suatu benda dalam bidang maka dapat dicari besar kecepatan dan percepatan dari benda tersebut. Besar kecepatan sebagai $\left|\bar{v}\right| = \left|\frac{dz}{dt}\right|$ dan besar percepatan

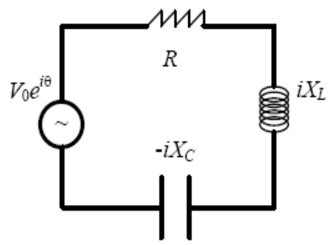
$\left|\bar{a}\right| = \left|\frac{d^2z}{dt^2}\right|$

Tugas 4 : Sebuah electron bergerak pada lintasan $z = \frac{2t+i}{3t+i}$. Hitungla kecepatan dan percepatan electron tersebut pada saat 7 detik pertama.

Aplikasi bilangan kompleks ternyata luas. Sebagai contoh perhitungan impedansi, tegangan dan arus maksimum dan fase getaran pada rangkaia arus bolak-balik(rangkaian listrik AC). Dalam rangkaian listrik AC, komponen dapat ditulis dalam bilangan kompleks :

- Resistor (Re R)
- Reaktansi induktif (Im iX_L)
- Reaktansi kapasitif (Im -iX_C)
- Tegangan (Bilngnan kompleks V_0 $e^{i\theta}$)

Misalnya untuk rangkaian seri RLC



Impedansi rangkaian ini dapat dicari dari jumlah lilitan dari ketiga komponennya :

$$z = R + i\,(X_L - X_C)$$
$$= Z\,e^{i\phi} \qquad \text{……………………………….(28)}$$

Modulusnya merupakan impedansi rangkaian

$$Z = |z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \text{…………………(29)}$$

Sedangkan argumennya merupakan beda fase antara arus dan tegangan rangkaian:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

……………………………(30)

$X_L = I_0 i\omega L$

$X_C = -i\, I_0/\omega C$

Sedangkan untuk mengetahui mana yang bergetar lebih dulu, arusnya atau tegangannya, dapat digunakan hukum Ohm :

$$I = \frac{V}{z} = \frac{V_0}{Z} e^{i(\theta - \phi)}$$

………………………………..(31)

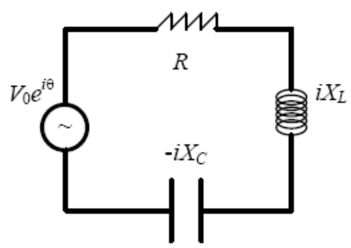
Yang menunjukan arusnya ketinggalan fase sejauh ϕ dari tegangannya.

Tugas 5 :

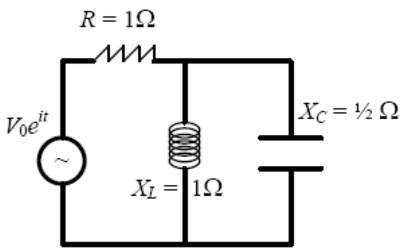
1. Hitunglah impedansi z dan periode T dalam rangkaian arus bolak-balik, dimana sumber tegangan dan arus merupakan fungsi cosinus dan sinus. Rangkaian RLC menggunakan fungsi exponensial bilangan kompleks

   $V = V_0\, e^{i\omega t}$

   $I = I_0\, e^{i\omega t}$



2.



Hitung impedansi untai AC berikut. Tentukan pula beda fase arus terhadap tegangannya antara titik *A* dan *B* !

Nyatakan arusnya dalam fungsi waktu *t* !